1	2	3	4
B	B-	R	B

CALIFICACIÓN
8 (OCHO)

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA/DNI:

Álgebra I - Curso de verano 2025

Segundo parcial - 14/03/2025

1. Encuentre todas las soluciones $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ de la ecuación

$$38a + 86b = 6$$

que satisfacen simultáneamente $29 \mid (a+b)^{10}$.

2. Describa mediante una única ecuación de congruencia todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$6^n \equiv 113 \pmod{143}.$$

3. Sea $\omega \in G_{10}$ tal que $\omega^5 \neq 1$. Encuentre la parte real de

$$\omega + \omega^{-7} + \overline{\omega}^6 + \omega^8 + \sum_{k=5}^{98} \omega^{5k}.$$

4. Factorice en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio $f = x^5 - x^4 - x^3 - 9x^2 - 30x - 20$, sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas y escriba con claridad.

1.

$38a + 86b = 6 \iff 19a + 43b = 3. \rightarrow (19:43) \mid 3$

Sol. homogéneo:

$19a + 43b = 0$

$\iff 19a = -43b$

$\iff \begin{cases} 19 \mid b \\ 43 \mid a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 19k, & k \in \mathbb{Z} \\ a = 43b, & b \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\rightarrow \cancel{19} \cdot 43b = -\cancel{43} \cdot \cancel{19}k$

$\iff b = -k$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -43k \\ b = 19k \end{cases}$

sé que: $-19 \cdot 9 + 43 \cdot 4 = 1$

$\Rightarrow 3(43 \cdot 4 - 19 \cdot 9) = 3$

$\iff 43 \cdot 12 - 19 \cdot 27 = 3.$

Sol. particular:

$\begin{cases} b = 12 \\ a = -27. \end{cases}$

Sumo ambas soluciones:

$\begin{cases} a = -27 - 43k \\ b = 12 + 19k \end{cases}$

* PTF: Corolario

$\cdot\ m \equiv r\,(p-1) \Rightarrow a^m \equiv a^r\,(p).$

(al final no lo utilicé).

- Ahora que tengo los valores de a y b, los reemplazo en la congruencia que deben satisfacer.

- $29 \mid (a+b)^{10} \iff (a+b)^{10} \equiv 0\,(29)$

Como 29 es primo, se que para que se cumpla $(a+b)^{10} \equiv 0\,(29)$, $(a+b)$ debe ser un múltiplo de 29.
Por lo tanto, puedo reducir la expresión a: $\boxed{a+b \equiv 0\,(29).}$

Analizo la nueva congruencia:

$a+b \equiv 0\,(29)$

$\iff -15 - 24k \equiv 0\,(29)$

$\iff 14 + 5k \equiv 0\,(29)$

$\iff 5k \equiv 15\,(29)$

$\times 6$, $6 \perp 29$. $\iff \boxed{k \equiv 3\,(29).} \rightarrow k = 29j + 3.$

- $a = -43(29j+3) - 27 \Rightarrow -1247j - 156 = a$
- $b = 19(29j+3) + 12 \Rightarrow 551j + 69 = b.$

$\therefore$ $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen la consigna:

$\boxed{(a,b) = (-1247j - 156,\ 551j + 69)}$

B

2.

HOJA 2

$\cdot\ 6^n \equiv 113\ (143)$
$143 = 11 \cdot 13.$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6^n \equiv 3\ (11) & \boxed{\mathrm{I}} \\ 6^n \equiv 9\ (13) & \boxed{\mathrm{II}} \end{cases}$$

★ PTF, corolario:
$n \equiv r\,(p-1) \Rightarrow a^n \equiv a^r\ (p).$
lo utilizo ya que $\begin{cases} 11 = p \\ 13 = p \end{cases}$
p = primo.

aplico PTF ★ $\iff \begin{cases} 6^{r_{10}(n)} \equiv 3\ (11) \\ 6^{r_{12}(n)} \equiv 9\ (11) \end{cases}$

$\boxed{r_{11}}$

$r_{10}(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$10 \equiv 0\ (10)$
6^n	1	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1

↳ I se cumple $\iff \boxed{n \equiv 2\ (10).}$

$\boxed{r_{13}}$

$r_{12}(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$12 \equiv 0\ (12)$
6^n	1	6	10	8	9	2	12	7	3	5	4	11	1.

↳ II se cumple $\iff \boxed{n \equiv 4\ (12)}$

· con los valores de n hallados armo un TCR, verificando incompatibilidades.

$$\begin{cases} n \equiv 2\ (10) \\ n \equiv 4\ (12) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} n \equiv 2\ (2) \equiv 0\ (2) \\ n \equiv 2\ (5) \end{cases}$$

$\begin{cases} n \equiv 0\ (4) \\ n \equiv 0\ (2) \end{cases} \rightarrow$ [illegible]

$\begin{cases} n \equiv 4\ (4) \equiv 0\ (4) \equiv 0\ (2) & \rightarrow \text{la descarto porque } n \equiv 2\ (10) \text{ ya implica esto.} \\ n \equiv 4\ (3) \equiv 1\ (3) \end{cases}$

$$\begin{cases} n \equiv 0\ (2) & \mathrm{III} \\ n \equiv 1\ (3) & \mathrm{IV} \\ n \equiv 2\ (5) & \mathrm{V} \end{cases}, \quad 2 \perp 3 \perp 5 \Rightarrow \exists!\ x \,/\, 0 < x < 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$n = 5k + 2 \xrightarrow{\text{en IV}} 5k + 2 \equiv 1\ (3)$
$\iff 2k \equiv 2\ (3)$
$\times 2,\ 2 \perp 3 \iff k \equiv 1\ (3) \rightarrow k = 3j + 1.$

$n = 5(3j+1) + 2 = 15j + 7 \xrightarrow{\text{en III}} 15j + 7 \equiv 0\ (2)$
$\iff j \equiv 1\ (2) \rightarrow j = 2h + 1$

$n = 15(2h+1) + 7 = 30h + 22$

$\therefore\ \forall n \in \mathbb{N}$ que cumplen $6^n \equiv 113\ (143)$
sol: $n \equiv 22\ (30)$

3_ $\qquad w + w^{-7} + \overline{w}^6 + w^8 + \underbrace{\sum_{k=5}^{98} w^{5k}}$ HOJA 3

- Comienzo analizando la sumatoria:

$$= \sum_{k=0}^{98} (w^5)^k - \sum_{k=0}^{4} (w^5)^k \underset{\substack{w^5 \neq 1 \\ \downarrow \\ \text{def. de} \\ \text{Geométrica}}}{=} \frac{w^{495} - 1}{w^5 - 1} - \frac{w^{25} - 1}{w^5 - 1}$$

$$= \frac{w^{25}(w^{470} - 1)}{w^5 - 1}.$$

· pero como por consigna sé que $\boxed{w \in G_{10}} \Rightarrow \begin{cases} w^{10} = 1 \\ w_k = e^{\frac{2k\pi}{10}}, \ 0 \le k \le 9 \end{cases}$

y $w^{470} = w^{10 \cdot 47} = 1^{47} = 1 \Rightarrow \dfrac{w^{25}(\overbrace{w^{470} - 1}^{=0})}{w^5 - 1} = 0.$ ✓

Luego, me queda la expresión:

$\longrightarrow w + w^{-7} + \overline{w}^6 + w^8 = w + w^3 - w^6 + w^8$ porque $w \in G_{10}$ y $\overline{w} = -w$. $= w^{-1}$

$w = e^{\frac{\pi}{5}i}$ → NO NECESARIAMENTE.

$$\left.\begin{array}{ll} w = e^{\frac{\pi}{5}i} & \longrightarrow = \cos\frac{\pi}{5} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}i \\ w^3 = e^{\frac{6\pi}{10}i} = e^{\frac{3\pi}{5}i} & \longrightarrow = \cos\frac{3\pi}{5} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}i \\ w^6 = e^{\frac{6\pi}{5}i} & \longrightarrow = \cos\frac{6\pi}{5} + \operatorname{sen}\frac{6\pi}{5}i \\ w^8 = e^{\frac{8\pi}{5}i} & \longrightarrow = \cos\frac{8\pi}{5} + \operatorname{sen}\frac{8\pi}{5}i \end{array}\right] = \cos\left[\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} - \frac{6\pi}{5} + \frac{8\pi}{5}\right]$$

$$= \boxed{\cos\left[\frac{6\pi}{5}\right]}$$ parte real de la exp.

PODRÍA SER $w = e^{\frac{3\pi}{5}i}$

SALÍA USANDO $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \operatorname{RE}(z)$.

R

4. $f = x^5 - x^4 - x^3 - 9x^2 - 30x - 20 \rightarrow$ tiene una raíz imaginaria pura. HOJA 4

"raíz imaginaria pura": $Re(z) = 0$, $z = a + bi$

$$\begin{cases} i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \\ i^5 = i \end{cases}$$

$f = b^5 i - b^4 + b^3 i + 9b^2 - 30bi - 20$

$\rightarrow Re(f) = 0 \iff -b^4 + 9b^2 - 20 = 0 \longrightarrow \underline{x = b^2}$

$\rightarrow Im(f) = 0 \iff b^5 + b^3 - 30b = 0$

$-x^2 + 9x - 20 = 0$

$\rightarrow \Delta = 81 - 4 \cdot (-1) \cdot (-20) = 1$

$\rightarrow \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{1}}{-2} = \dfrac{-9 \pm 1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \sqrt{2} \\ b_2 = \sqrt{5} \end{cases}$

$\downarrow$

$\begin{cases} b = \sqrt{2} \Rightarrow 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = -14\sqrt{2} \neq 0. \\ b = \sqrt{5} \Rightarrow 25\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 30\sqrt{5} = 0. \end{cases}$

$\hookrightarrow$ el b que cumple es $b = \sqrt{5}$.

$\Rightarrow$ sé que $\boxed{\sqrt{5}i}$ es raíz f, como $\in \mathbb{C}$, también lo será $\boxed{-\sqrt{5}i}$

- $(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i) = \boxed{(x^2 + 5)} \longrightarrow$ usé: $(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - 2Re(z)x + |z|^2$.

Divido f por lo calculado previamente:

$$\begin{array}{l|l} x^5 - x^4 - x^3 - 9x^2 - 30x - 20 & x^2 + 5 \\ \hline -(\cancel{x^5} + 5x^3) & x^3 - x^2 - 6x - 4 \\ \quad -x^4 - 6x^3 - 9x^2 - 30x - 20 & \\ \quad -(-x^4 - 5x^2) & \\ \quad -6x^3 - 4x^2 - 30x - 20 & \\ \quad -(-6x^3 - 30x) & \\ \quad -4x^2 - 20 & \\ \quad -(-4x^2 - 20) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

(lo hallé con la calculadora)

$\hookrightarrow x = -1$ es sol $\Rightarrow$ divido el pol por $(x+1)$ para seguir reduciéndolo ★

★

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - 6x - 4 & x + 1 \\ \hline -(x^3 + x^2) & x^2 - 2x - 4 \\ \quad -2x^2 - 6x - 4 & \\ \quad -(-2x^2 - 2x) & \\ \quad -4x - 4 & \\ \quad -(-4x - 4) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$\rightarrow \Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 20$.

$\rightarrow \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 5}}{2} = \boxed{1 \pm \sqrt{5}}$

Factorizaciones:

$f_1 = (x+1)\underbrace{(x^2+5)}_{\text{raíces} \notin \mathbb{Q}}\underbrace{(x^2 - 2x - 4)}_{\text{raíces} \notin \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[x]$

$f_2 = (x+1)\underbrace{(x^2+5)}_{\text{raíces} \notin \mathbb{R}}(x - (1+\sqrt{5}))(x - (1-\sqrt{5})) \in \mathbb{R}[x]$.

$f_3 = (x+1)(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i)(x - (1+\sqrt{5}))(x - (1-\sqrt{5})) \in \mathbb{C}[x]$

Todos son irreducibles.

B